La matematica e lo spazio

I modelli geometrici

Scheda **1**

Traslazioni, vettori e distanze

0. Introduzione

Generalizzando le considerazioni svolte nella prima scheda dell'u.d. *Per strada,* non mi riferirò più a carte stradali, a posizioni in una città, a movimenti lungo una strada, … ma a superfici generiche, a punti, a linee generate da un punto in movimento, …. In altre parole voglio considerare uno spazio astratto, considerare definizioni e proprietà svincolate da particolari situazioni,… Ciò avrà un duplice vantaggio.

Da una parte, potrò ragionare più liberamente, ad es. senza tener conto dei problemi di approssimazione, del fatto che le strade possono non essere perfettamente piane, della presenza di piccole asperità,…

Dall'altra, le proprietà studiate potranno essere applicate a molte altre situazioni, non solo alle cartine stradali.

1. Il piano cartesiano

Per ora vogliamo considerare solo posizioni, movimenti, … che avvengono su superfici piane. Ma che vuol dire *superficie piana*? Quando usiamo questo termine abbiamo in mente dei *prototipi*, come la parte superiore di un tavolo, una piazza piatta e con il fondo liscio, la parete di un muro, la superficie di uno stagno, …. E` questo il modo in cui impariamo il significato di gran parte delle parole che usiamo.

Provate a cercare su un *dizionario* il significato di *piano*, *piatto*, …. Troverete delle spiegazioni insoddisfacenti o che rimandano l'una all'altra, oltre, appunto, a qualche esempio chiarificatore, che funge da prototipo. Un dizionario non può definire tutto, ma si deve servire di un certo numero di parole il cui significato viene assunto come conosciuto dall'utente.

Consideriamo ad esempio un particolare dizionario della lingua inglese. Alla fine del dizionario è riportato come "The defining vocabulary" un elenco di circa 2000 parole conoscendo le quali è possibile comprendere le spiegazioni dei significati di tutte le altre.

```
PRUNE — DRIED — PAST
  |           — PARTICIPLE
  |           — OF
  |           — DRY — MAKE
  |                 — DRY
  — PLUM — RED
         — BLUE
         — YELLOW
         — STONE
         — OR
         — WITH
         — A
         — IN
         — IT
```

− Se ad esempio cerco *prune* trovo «dried plum».
− Cerchiamo *dried* e troviamo «past participle of dry».
− Il significato di *participle*, di *past* e di *of* non è descritto esaurientemente dal dizionario (ci sono dei "giri di parole" e degli esempi); infatti si tratta di parole che fanno parte del "defining vocabulary" (sono *nodi finali* nel grafo a fianco). I loro corrispondenti italiani sono *participio*, *passato* e *di*.
− Per il verbo *dry* troviamo «make dry».
− Il verbo *make* e l'aggettivo *dry* fanno parte del "defining vocabulary". I loro corrispondenti italiani sono il verbo *fare* (*rendere*, …) e l'aggettivo *secco*.
− Per *plum* trovo «red, blue-red or yellow fruit with a stone in it». Le parole presenti nelle descrizione fanno tutte parte del "defining vocabulary". La traduzione è «frutto rosso, blu-rosso o giallo con dentro un nocciolo».

$\boxed{1}$ Hai capito il significato di *prune*? Come tradurresti in italiano *prune*?

Per definire il mio generico spazio piano in modo non ambiguo abbandono il dizionario e utilizzo i numeri, oggetti matematici di cui, ormai, ho precisato in modo abbastanza chiaro il significato. Ho già considerato la *retta dei numeri* come modello matematico delle traiettorie rettilinee (di cui ho come prototipi i raggi di luce, la traiettoria di un sasso lasciato cadere da una certa altezza, un filo teso, …): un punto, cioè una posizione della traiettoria, viene identificato con un numero reale (➔ scheda 2 de *I numeri*).

Ora posso definire come modello matematico delle superfici piane l'insieme delle coppie (x, y) di numeri reali, che chiamerò ***piano numerico*** o, più semplicemente *piano.*

L'idea è abbastanza naturale: non è altro che una generalizzazione dell'uso delle coordinate nelle carte geografiche. Come alla retta numerica ho associato l'idea intuitiva di una scala graduata su cui posso tracciare tacche man mano più fitte, così al piano numerico associo l'*idea intuitiva* di un reticolato su cui, con lenti man mano più potenti, posso andare a scoprire quadrettature di lato man mano più piccolo.

Nella *figura 1* sono raffigurate localizzazioni man mano più precise del ***punto*** (x, y) con x=2.8763… e y=1.1635…. Con lenti opportunamente potenti posso conoscere quante cifre voglio di x e di y.

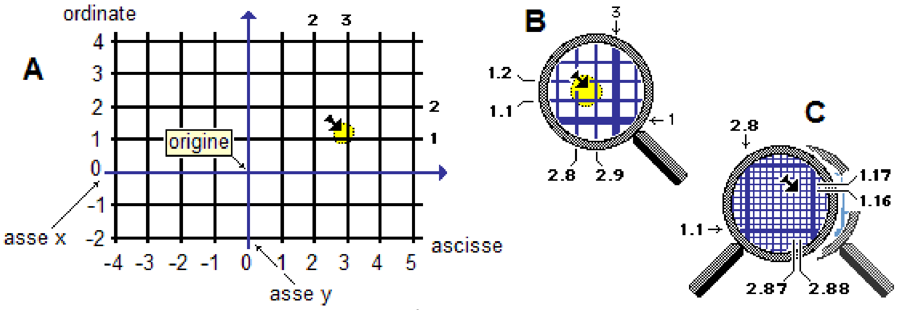


figura 1

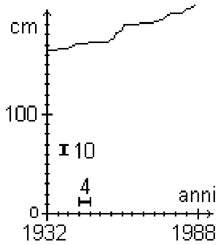


figura 2

Rappresentando graficamente dati relativi a fenomeni di vario genere (→ *figura 2,* dove un punto (x,y) del grafico rappresenta il fatto che "nell'anno x il record in vigore era y centimetri": → scheda 2 di *Le statistiche*), spesso a divisioni orizzontali e verticali uguali vengono associati intervalli numerici di diversa ampiezza, cioè la scala orizzontale e quella verticale vengono scelte differentemente.

Invece, quando su un foglio di carta millimetrata o quadrettata voglio rappresentare semplicemente delle figure geometriche (punti che rappresentano solo posizioni, linee o altri insiemi di punti che non rappresentano relazioni tra grandezze ma solo traiettorie o altre parti di spazio) la graduazione orizzontale e quella verticale le scandisco con la stessa "unità di misura": in figura 1 l'intervallo [0, 1] è rappresentato da divisioni uguali sia sulle rette graduate verticali che sulle rette graduate orizzontali.

La retta graduata *orizzontale* di ordinata 0 viene chiamata ***asse x***. La retta graduata *verticale* di ascissa 0 viene chiamata ***asse y***. Il punto (0,0), che sta all'incrocio di queste due rette, viene chiamato *origine.*

A volte il piano numerico viene chiamato ***piano cartesiano***, a ricordo di *Cartesio,* matematico e filosofo francese vissuto nel XVII secolo che inventò l'uso delle coordinate per dare una descrizione matematica del concetto di spazio.

La retta e il piano vengono chiamati anche, rispettivamente, *spazio a 1 dimensione* (un punto è individuato da *un* numero reale, cioè da una coordinata) e *spazio a 2 dimensioni* (un punto è individuato da *due* numeri reali, cioè da due coordinate).

Se, invece, voglio considerare posizioni e movimenti che non stanno su una traiettoria rettilinea o su una superficie piana (ad es. il volo di un aereo) devo ricorrere a *tre* coordinate. Ad es. per indicare la posizione in cui si trova un sommergibile o un aereo posso usare due numeri x e y per individuare la posizione sulla superficie del mare e un numero z per individuare la profondità o l'altitudine. Lo *spazio tridimensionale* è l'insieme delle terne (x, y, z) di numeri reali.

Anche per la parola "***spazio***" valgono considerazioni simili a quelle svolte per la parola "piano". Nella *vita quotidiana* usiamo "spazio" in vari modi: «in fondo alla pagina c'è ancora *spazio* per tre righe di testo», «ci sono molte stelle nello *spazio*», «in "lazia" manca uno spazio tra "la" e "zia"», … Potremmo dire che viene utilizzata per indicare un "vuoto" o un "contenitore", di dimensioni prefissate o no, in cui si possono mettere o si può pensare di mettere cose o in cui possono muoversi cose. È una descrizione un po' generica del significato di "spazio", e che fa riferimento al significato di altre parole ("vuoto", "contenitore", "cosa", …) il cui significato a sua volta non è semplice descrivere in modo preciso. Non risulterebbe difficile delimitare meglio il significato che assume in alcuni usi particolari (ad es. nel caso dello *spazio* che manca tra "la" e "zia"), ma non è possibile *definire* chiaramente il significato più generale di "spazio", neanche ricorrendo a un *dizionario*. Tuttavia attraverso l'uso della lingua italiana, attraverso la memorizzazione di situazioni a cui viene applicata la parola "spazio", … ci costruiamo mentalmente un significato di spazio che è sufficiente per l'usuale comunicazione linguistica.

Anche *in matematica* la parola "spazio" viene usata in modi diversi, per indicare vari concetti. Ma, per salvaguardare la natura *astratta* dei *modelli matematici* questi concetti non possono essere descritti riferendosi solo a specifiche applicazioni pratiche e al significato intuitivo di parole d'uso quotidiano. Quella sopra richiamata (insieme delle terne di numeri reali) è la definizione dello *spazio cartesiano.* Altri concetti di spazio saranno definiti in schede successive.

2. Traslazioni e vettori

Nel seguito spesso useremo la seguente convenzione.

Se nel corso di un ragionamento indico un punto con P, con P_1, con P_2, …, allora indico le sue coordinate rispettivamente con x, y, x_1, x_2, … Se invece indico un punto con una lettera diversa, ad es. con A, con B, …, allora indico le sue coordinate con x_A, x_B, …

Consideriamo i *cambiamenti di posizione.*

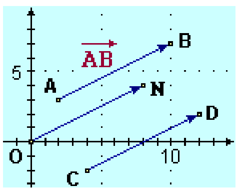


figura 3

Spostandomi da A a B, da C a D o da O a N (*figura 3*) compio lo stesso cambiamento di posizione. Intuitivamente posso descrivere ciò dicendo che le tre *frecce* da A a B, da C a D e da O ad N hanno stessa direzione e stessa lunghezza.

In fisica la freccia che rappresenta il cambiamento di posizione per andare da A a B viene chiamata *spostamento* e viene indicata con una freccia sovrapposta ad AB, come nel disegno a lato. Due spostamenti vengono considerati *uguali* quando sono frecce con la stessa direzione e la stessa lunghezza.

[**Nota.** In qualche libro di fisica invece di *direzione* si parla di *direzione orientata* e si usa la parola direzione come sinonimo della parola *inclinazione*. In particolare di due spostamenti che hanno direzioni opposte, come quello che porta A in B e quello che porta D in C (è la "freccia" CD invertita), si dice che hanno la stessa direzione e *verso* opposto]

Ma *che cos'è una freccia*?

Per ricondurmi a concetti matematici posso rappresentare gli spostamenti, invece che parlando di frecce, riferendomi alle coordinate dei punti di partenza e di arrivo.

Lo spostamento da A a B può essere descritto indicando la ***variazione orizzontale*** $x_B - x_A$, che indicherò anche con Δx, e la ***variazione verticale*** $y_B - y_A$, che indicherò anche Δy.

[Δx sta per "**d**ifferenza delle x"; infatti Δ è la lettera greca "delta" maiuscola, che si legge come la lettera italiana D]

Nel primo caso della *figura 4* ho $\Delta x>0$ e $\Delta y>0$: spostandosi da A a B aumentano sia la ascissa che l'ordinata. Nel secondo caso ho $\Delta x>0$ e $\Delta y<0$: spostandosi da P a Q aumenta la ascissa ma diminuisce l'ordinata.

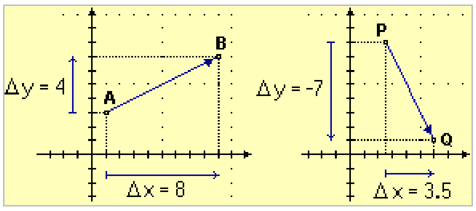


figura 4

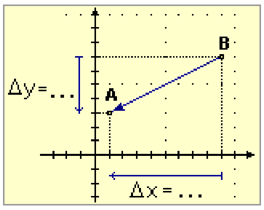


figura 5

2 Quanto valgono Δx e Δy nel caso a sinistra?

Posso descrivere il cambiamento di posizione che fa variare la coordinata orizzontale di Δx e la coordinata verticale di Δy come una funzione che dato un punto (x,y) gli associa il punto $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$.

Nel caso a sinistra di fig. 4 ho applicato la funzione $(x,y) \to (x+8,\ y+4)$. Dal punto A = (1,3) passo al punto B = (1+8,3+4) = (9,7). Anche nel caso a destra ho applicato a C la stessa funzione: C = (4,1) → D = (4+8,1+4) = (12,5)

Nel caso di fig. 5 ho invece applicato la funzione $(x,y) \to (x-8,y-4)$. Rispetto alla precedente, questa funzione rappresenta il cambiamento di posizione opposto: (9,7) viene riportato in (1,3).

Queste funzioni vengono dette traslazioni (dal latino *translatio*, che significa "trasporto", "trasferimento"). Più in generale, dati due numeri *h* e *k*, viene detta ***traslazione** di passi h,k* la funzione che associa al punto (x,y) il punto $(x+h,\ y+k)$.

I passi di una traslazione non sono altro che le variazioni Δx (passo "orizzontale") e Δy (passo "verticale") delle coordinate tra i punti in input e i punti in output.

La traslazione che porta da un punto A a un punto B ha passi: $\Delta x = x_B - x_A$, $\Delta y = y_B - y_A$. La coppia $(\Delta x,\Delta y)$ viene indicata più in breve con AB con sovrapposta una **freccia**, come visto in fig.3, o con la scrittura **B−A** (il "meno" indica che è una specie di differenza: la "variazione" per andare da A a B), ed è chiamata ***vettore* AB**.

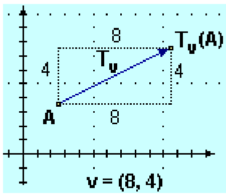
In *figura 1* sono raffigurati il punto A, il punto C e l'origine O e i punti che si ottengono da essi con la traslazione di passi 8, 4: A = (2,3) → B = (2+8,3+4) = (10,7), C = (4,−2) → D = (4+8,−2+4) = (12,2), O = (0,0) → N = (0+8,0+4) = (8,4).

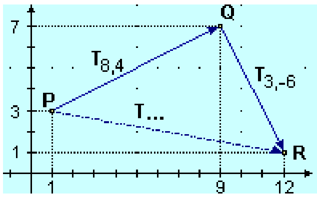
I vettori AB, CD e ON sono ***uguali***: sono diversi modi per indicare la traslazione di passi 8,4: $x_B-x_A = x_D-x_C = x_N-x_O = 8$, $y_B-y_A = y_D-y_C = y_N-y_O = 4$.

[La parola *vettore* nel linguaggio comune significa "portatore" (ad esempio la persona che effettua la consegna di una merce viene chiamata "il vettore", il razzo impiegato per mettere in orbita un satellite artificiale viene chiamato "razzo vettore", …); deriva dal verbo latino *vehere*, che significa "portare" (dallo stesso verbo derivano: vettura, veicolo, …). E` evidente il motivo per cui è stato scelto questo nome per i passi delle traslazioni]

Se *v* è il vettore (*h*,*k*), indicheremo con T_v o con $T_{h,k}$ la traslazione di passi h,k, che chiameremo anche traslazione *determinata* da *v* o traslazione di vettore *v*. Indicheremo con $T_v(x,y)$ il *traslato* del punto (x,y), cioè il punto $(x+h,y+k)$. Vedi la figura sottostante a sinistra.

I numeri *h* e *k* vengono chiamati le ***componenti*** di *v*. Il nome deriva dal fatto che T_v può essere vista come il frutto della composizione di una traslazione orizzontale di passo *h* e una traslazione verticale di passo *k*, o, viceversa, di una traslazione verticale di passo *k* e una traslazione orizzontale di passo *h.*





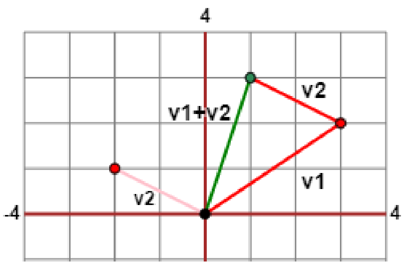
Nella figura a fianco, a destra, è rappresentato un punto P e i punti ottenuti da esso applicando prima $T_{8,4}$ (punto Q) e poi $T_{3,-6}$ (punto R).

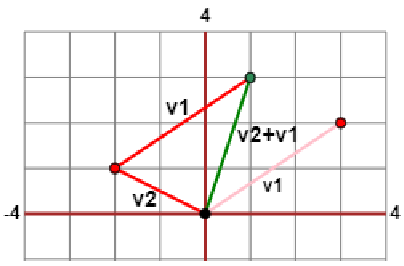
3 Qual è la traslazione che porta da P a R? Che relazione c'è tra i suoi passi e quelli delle altre due traslazioni?

Come abbiamo già visto nella scheda 1 di *Per Strada* (quesito ➔ **e**1), la traslazione complessiva ha come Δx la somma dei Δx delle traslazioni successivamente applicate e come Δy la somma dei loro Δy. Nel caso del quesito precedente la composizione di $T_{8,4}$ e di $T_{3,-6}$ è la traslazione determinata dal vettore $(8+3,\ 4+(-6)) = (11,\ -2)$. Per rappresentare $(8+3,\ 4+(-6))$ in forma più compatta si usa scrivere: $(8,4)+(3,-6)$. Quindi posso scrivere: $(8,4)+(3,-6) = (11,-2)$.

Cioè si *definisce* ***addizione tra vettori*** la funzione che a due vettori $v_1 = (h_1,k_1)$ e $v_2 = (h_2,k_2)$ associa il vettore $(h_1+h_2,\ k_1+k_2)$, che è indicato v_1+v_2 e chiamato *somma* di v_1 e v_2.

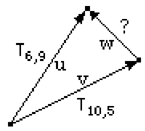
Posso, perciò, dire che la traslazione frutto della composizione di due traslazioni è determinata dal vettore che è la somma dei vettori delle due traslazioni successivamente applicate.

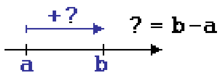




Sommare vettori si traduce nel fare l'addizione delle prime componenti e l'addizione delle seconde componenti. Poiché queste addizioni possono essere riordinate senza cambiare risultato, posso concludere che *cambiando l'ordine con cui sommo più vettori il vettore risultante rimane immutato.*

4 Completa la figura a fianco, cioè trova qual è la traslazione che occorre far seguire alla traslazione di vettore (10,5) per ottenere complessivamente la traslazione di vettore (6,9). In altre parole, trova che cosa occorre mettere al posto di "?" in v + ? = u.





Il vettore *w* del quesito precedente è quanto occorre aggiungere a *v* per ottenere *u*. In analogia al caso dei numeri (vedi figura a fianco), si dice che *w* è il ***vettore differenza*** tra *v* e *u*. Si scrive anche *w* = *u*−*v* (*u* "meno" *v*). Le sue componenti sono la differenza delle componenti di *v* e *u*. Se *u* = (h_1,k_1) e *v* = (h_2,k_2), allora *u*−*v* = (h_1−h_2, k_1−k_2).

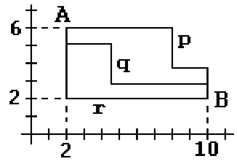
3. Distanza euclidea e distanza urbanistica

Generalizzando il concetto di distanza in linea d'aria visto nella ➡ scheda 1 dell'u.d. *Per strada* definiamo ***distanza euclidea*** tra due punti P_1 e P_2 il numero:

(3.1) $$d(P_1, P_2) = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

5 Calcola (e arrotonda a 5 cifre) la distanza euclidea tra i punti P e R del quesito 4. d(P, R) = …

L'aggettivo *euclidea* deriva dal nome (*Euclide*) del matematico dell'antica Grecia (vissuto nel III secolo a.C.) a cui è dovuto il primo trattato organico di geometria astratta. In realtà ai tempi di Euclide non era ancora stato inventato l'uso delle coordinate e, quindi, lui non esprimeva la distanza come in (3.1). L'aggettivo è stato aggiunto poiché oltre a questa distanza ne possono essere definite altre.



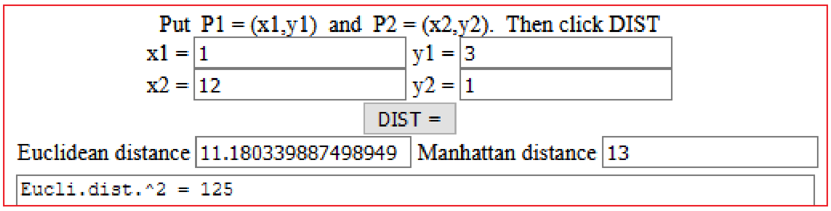
Se voglio considerare un modello matematico per studiare le situazioni in cui ci si può muovere solo in verticale e in orizzontale, come nel caso di Otto Bus (➡ scheda 1 di *Per strada*), quando va a piedi dalla fermata dell'autobus a scuola, cioè in cui, se A e B sono le posizioni a fianco raffigurate, non ci sono percorsi più brevi per andare da A a B di **p**, **q** o **r** o di traiettorie simili, posso definire:

(3.2) $$d(P_1, P_2) = |\Delta x| + |\Delta y| = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$$

Nel caso raffigurato ho: $d(A,B) = |x_B-x_A| + |y_B-y_A| = 8+4 = 12$

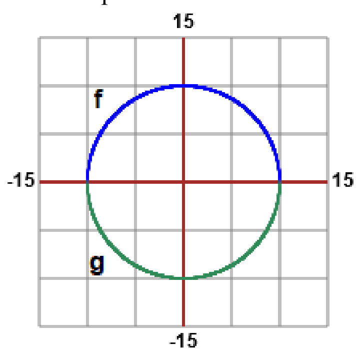
La distanza definita dalla relazione (3.2) viene chiamata ***distanza urbanistica*** (o *taxicab distance* o *Manhattan distance*). Il nome deriva dal fatto che essa rappresenta la distanza tra due incroci in una città in cui le strade sono tutte disposte orizzontalmente o verticalmente.

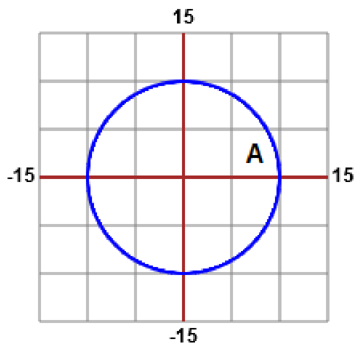
Il programma in JS allegato calcola la distanza euclidea e la distanza urbanistica tra due punti del piano. Sotto ne è riprodotto un esempio d'uso.



Potendo muoversi liberamente in tutte le direzioni, quali sono i punti che hanno 10 come distanza euclidea dall'origine, cioè quali sono i punti più lontani in cui si può arrivare partendo dall'origine con un percorso lungo 10?

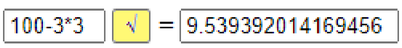
Inizio ad osservare che $\sqrt{x^2+y^2} = 10$ equivale a $x^2+y^2 = 100$, ovvero a $y^2 = 100 - x^2$. Se $y \ge 0$ questa formula equivale a $y = \sqrt{100-x^2}$. Se $y \le 0$ equivale a $y = -\sqrt{100-x^2}$. Il cerchio posso tracciarlo come unione dei due grafici di queste funzioni, chianate **f** e **g** nella figura sottostante a sinistra. Lo script con cui sono state tracciate: cerchio 1.

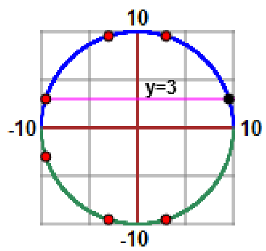




Il cerchio potrebbe essere tracciato anche come grafico **A** di una opportuna relazione matematica; in questo modo è stata realizzata la figura a destra. Esamineremo il prossimo anno come fare grafici di questo tipo (se sei curioso, puoi guardare cerchio 2).

Sotto abbiamo calcolato l'ordinata del punto evidenziato col pallino nero nella figura a destra.





6 Spiega perché si è proceduto così, e trova, senza calcoli, le coordinate degli altri punti evidenziati nella figura (ottenuti con opportuni ribaltamenti).

4. Formule e figure geometriche

Nel seguito, a meno di indicazioni contrarie, quando parleremo di *distanza* intenderemo sempre la distanza euclidea.

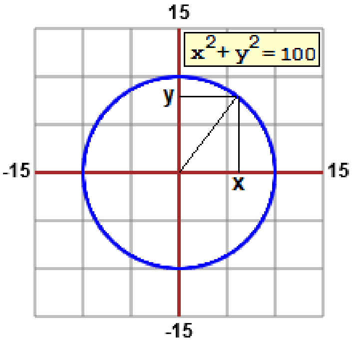


figura 6

Ho visto che l'insieme dei punti che distano 10 dall'origine assume la forma di un ***cerchio***. In effetti, presi un punto *C* del piano e un numero positivo *r*, il cerchio di centro *C* e raggio *r* viene *definito* come l'insieme dei punti che distano *r* da *C*.

Ho poi osservato che la figura ottenuta può essere descritta come l'insieme dei punti (*x*,*y*) che rendono vera l'equazione $x^2+y^2 = 100$.

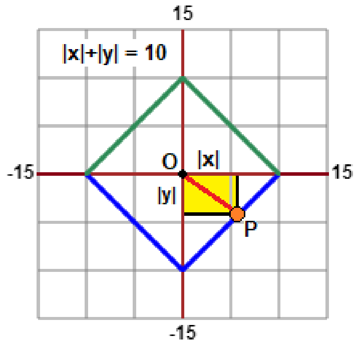
Invece di scrivere *l'insieme degli* α tali che sia vera la condizione Γ si possono usare le abbreviazioni:

{α t.c. **Γ}** o **{α : Γ}** o **{α / Γ}**.

Quindi il cerchio centrato nell'origine e di raggio 10 può essere descritto come:

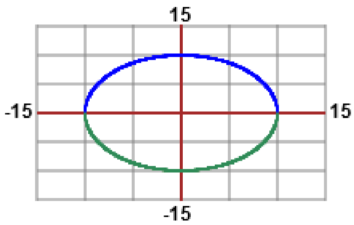
$\{ (x,y) : \ x^2+ y^2 = 100 \}$

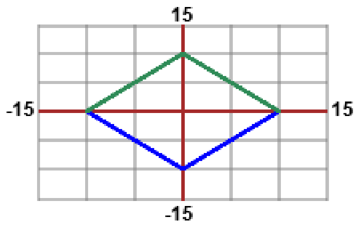
$\boxed{7}$ Traccia in figura 6 l'insieme di punti descrivibile come $\{ (x,y) : x^2+ y^2 = 25 \}$.



L'insieme dei punti che distano 10 dall'origine secondo la distanza urbanistica ha la forma di un quadrato. La distanza urbanistica di P = (x,y) da O è |x|+|y|. Non è altro che la somma dei valori assoluti delle componenti del vettore P−0. Ad es. il punto (6,−4) dista 10 da (0,0) in quanto per spostarmi orizzontalmente da x=0 a x=6 devo variare la x di 6, per spostarmi da y=0 a y=−4 devo variare la y di −4, cioè di 4 in meno: la somma dei valori assoluti delle variazioni è 10. Posso dunque dire che il quadrato rappresentato a lato è: $\{ (x,y) : |x|+|y| = 10 \}$.

Se non avessi scelto un sistema monometrico (➔ *Le statistiche-2*) avrei potuto ottenere, per il nostro cerchio e il nostro quadrato, le rappresentazioni seguenti:



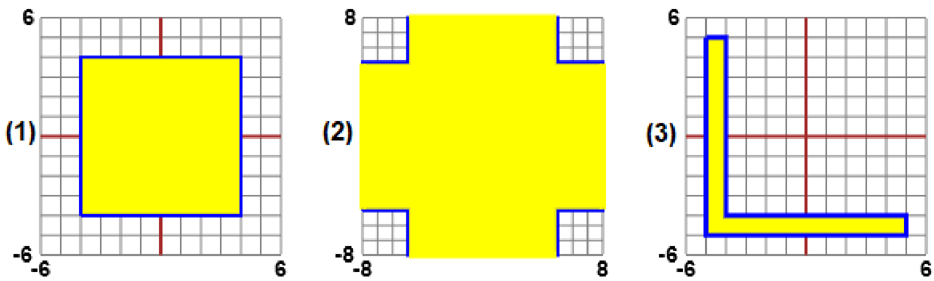


L'aspetto non è più quello di un "cerchio" o di un "quadrato": se misuro "fisicamente" le distanze con un righello, i punti della figura a sinistra non hanno la stessa distanza dal punto (0,0) e le due diagonali della seconda figura non hanno la stessa lunghezza. Ma dal punto di vista "matematico", riferendomi al piano cartesiano e alla distanza euclidea, sono di fronte, anche in questi casi, a un "cerchio" e a un "quadrato". Ho già fatto una analoga distinzione tra "pendenza stradale" e "pendenza dei grafici" (➔ *pendenza* in *Gli oggetti matematici*).

Come posso descrivere "numericamente" (cioè mediante una formula numerica) la parte interna al cerchio di figura 6, cioè all'insieme degli (x,y) che rendono vera l'equazione $x^2+ y^2 = 100$? Si tratta dei punti che hanno distanza *d* da O inferiore a 10, cioè tali che $d^2 <100$. Quindi questa figura può essere descritta con la ***disequazione*** $x^2+ y^2 < 100$: $\{ (x,y) : x^2+ y^2 < 100 \}$

$\boxed{8}$ Come descriveresti numericamente la parte interna al quadrato della figura successiva al ques. 7?

$\boxed{9}$ Come descriveresti numericamente il quadrato punteggiato nella successiva figura **(1)**?



Nel piano cartesiano molte figure possono essere descritte mediante equazioni ($x^2+ y^2= 100$, $|x|+|y| = 10$, …) o mediante disequazioni ($x^2+ y^2< 100$, $|x|+|y| < 10$, …) o mediante combinazioni di equazioni e disequazioni.

Ad esempio la figura dell'ultimo quesito era descrivibile come: $\{(x,y) : -5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5\}$. Nel caso dell'illustrazione **(2)** la figura tratteggiata è una croce i cui bracci suppongo si prolunghino senza fine. Essa comprende tutta la striscia di piano che va dalla ordinata −5 alla ordinata 5 e tutta la striscia di piano che va dalla ascissa −5 alla ascissa 5. Posso perciò descriverla come:
$\{(x,y) : -5 \le x \le 5$ ***o*** $-5 \le y \le 5\}$.

Nello scrivere $\{(x,y) : -5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5\}$ ho inteso che la condizione sia vera quando siano vere $-5 \le x \le 5$ ***e*** $-5 \le y \le 5$, cioè quando siano vere entrambe contemporaneamente.

Si è già osservato (➔ ques. e4 della scheda 1 di *Per strada*) che la *congiunzione* "***e***" nel linguaggio comune non è sempre impiegata con questo significato. Ad esempio nella frase «l'uso di questo medicinale è sconsigliato alle persone con età minore di 5 anni *e* maggiore di 70 anni» non si intendono indicare le età che siano contemporaneamente minori di 5 e maggiori di 70 anni – tali età non esistono! – ma si intende: « … alle persone con età minore di 5 anni *e a quelle con età* maggiore di 70 anni».

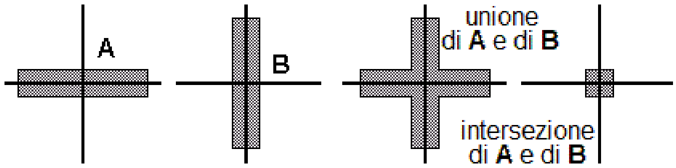
Nello scrivere $\{ (x,y) : -5 \le x \le 5$ o $-5 \le y \le 5 \}$ ho inteso che la condizione sia vera quando sia vera *almeno una* tra le due condizioni $-5 \le x \le 5$ e $-5 \le y \le 5$.

Nel linguaggio comune invece un "***o***" tra due condizioni spesso viene usato per indicare che deve essere vera *una sola* tra le due condizioni.

Volendo evitare ambiguità con gli usi delle congiunzioni nel linguaggio comune posso ricorrere agli operatori logici OR, AND e NOT. Quindi posso descrivere le due figure con:

$$\{(x,y): -5 \le x \le 5 \text{ OR } -5 \le y \le 5\} \qquad \{(x,y): -5 \le x \le 5 \text{ AND } -5 \le y \le 5\}$$

Ecco le rappresentazioni grafiche di **A** OR **B** e di **A** AND **B**.



10 Descrivi la figura **(3)** (dopo il ques.9).

Nota. Cerchio o circonferenza? Il quadrato è solo il contorno? … In vari testi di geometria italiani ciò che qui abbiamo chiamato *cerchio* viene chiamato ***circonferenza*** mentre con il nome *cerchio* si intende comprendere anche la parte interna. Ad esempio $x^2+y^2=100$ descriverebbe una circonferenza, $x^2+y^2 \le 100$ un cerchio. Analogamente, nel caso della figura successiva al ques. 12, c'è chi chiama quadrato solo il contorno ($|x|+|y|=10$) e chi chiama quadrato il contorno con la parte interna ($|x|+|y|\le 10$). Questioni analoghe valgono per i triangoli, le sfere (solo la superficie o anche la parte interna?), …

Noi non "sposeremo" una posizione particolare. Il contesto man mano chiarirà a quale figura ci riferiremo.

5. Geometria e realtà

I modelli matematici considerati in questa scheda (punti, traslazioni, vettori, figure, …) vengono studiati in un'area della matematica chiamata ***geometria***.

Questo nome è di origine greca (deriva da *ghé* e *metron* che in greco significavano «terra» e «misura») e, come primo significato, indicava le tecniche per la misura dei campi, per la suddivisione dei terreni in parti di forme opportune, …. In questo senso è sopravvissuta la parola *geometra*, con cui viene indicato il professionista che fa rilevamenti topografici e si occupa di altre questioni riguardanti il territorio: strade, piccole costruzioni, … (all'università vengono chiamati *geometri* anche i matematici che si occupano di geometria; ma questa è una terminologia per "addetti ai lavori").

Ora di questi aspetti si occupano, appunto, i geometri, gli architetti, gli ingegneri, …. *Il matematico studia in generale i modelli matematici per rappresentare lo spazio, senza legarsi a una particolare situazione* (forme ed estensioni di terreni, oggetti, …, movimenti di pianeti, macchine, elettroni, …, disposizioni delle parti che compongono un edificio, un animale, una molecola chimica, …).

Abbiamo visto, ad esempio, che per il matematico la *distanza* − (3.1) o (3.2)) − è un numero senza l'indicazione di una unità di misura.

È quando il *piano* viene visualizzato su un foglio di carta che si stabilisce una unità grafica con cui rappresentare, ad esempio, le unità o le decine. Oppure è quando si associa al nostro piano astratto una situazione concreta che si stabilisce l'unità di misura con cui esprimere le distanze.

Quando, "facendo matematica", consideriamo un cerchio disegnato con un compasso (il centro è la posizione in cui è stata messa la punta del compasso, il raggio è la distanza tra mina e punta), non ci preoccupiamo del colore con cui è stato tracciato o del colore e del tipo di foglio impiegato; non ci preoccupiamo neanche, troppo, dello spessore della linea tracciata. Cerchiamo, cioè, di *astrarre* solo la figura geometrica, cioè l'insieme dei punti (cioè di posizioni "esatte") che con quel disegno si vorrebbe rappresentare.

Quando di un oggetto reale consideriamo la figura geometrica che esso forma facciamo un'astrazione non solo perché trascuriamo colore, materiale, … dell'oggetto, ma anche perché, in genere, la sua forma è solo una approssimazione della figura geometrica considerata.

Ad esempio anche se diciamo che un tavolo è rotondo in realtà la superficie di base del tavolo non ha rigorosamente la forma di un cerchio: comunque si cerchi di fissare un centro C non si avrà mai che tutti i punti del bordo sono "esattamente" equidistanti da C. Impiegando strumenti di misura man mano più precisi prima o poi si trovano delle differenze. Infatti il bordo presenta inevitabilmente qualche irregolarità, per quanto piccola possa essere.

Anche quando usiamo il concetto di *piano* facciamo una astrazione.

Ad esempio quando diciamo che un territorio è piano in realtà trascuriamo le piccole asperità che, comunque, il terreno presenta.

Quando, poi, considerassimo una rappresentazione cartografica del territorio e cercassimo di trovare la distanza tra due punti mediante la formula (3.1), se il territorio è molto ampio troveremmo un valore abbastanza diverso da quello che troveremmo usando la scala riportata sulla cartina; ed entrambi questi due valori sarebbero diversi da quello che si otterrebbe con una misura diretta.

La superficie della terra infatti è sferica: solo piccole porzioni di essa (il territorio di una città, quello di una provincia) possono essere approssimate abbastanza fedelmente con delle parti di piano. Per territori più ampi, comunque si fissi un sistema di coordinate non si riesce a trovare una corrispondenza tra le distanze calcolate con (3.1) e quelle misurate direttamente (→ scheda 1 de *La matematica e i suoi modelli*).

Non esistono confini netti tra la geometria e le altre aree della matematica.

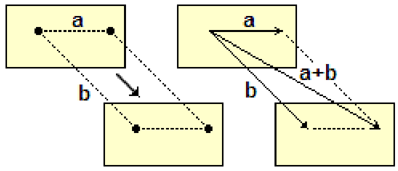
Ad esempio per fare geometria si usano anche i numeri, le funzioni, le equazioni, … .

Viceversa, per analizzare i valori di una grandezza che varia nel tempo o il modo in cui si distribuisce una serie di dati o …, si ricorre spesso alla rappresentazione grafica dei valori numerici e allo studio della forma della figura che così si ottiene. Anche i grafi e i diagrammi di flusso in qualche modo ricorrono a dei concetti di tipo geometrico.

I modelli geometrici servono, dunque, non solo per rappresentare lo *spazio fisico,* ma anche per visualizzare altri modelli matematici (funzioni, equazioni, statistiche, …).

Anche i termini *orizzontale* e *verticale* in matematica spesso sono usati in modo convenzionale, come fatto anche → sopra. In altri casi (e in particolare in *fisica*) sono usati in un modo diverso: *verticale* indica "diretto come la forza di gravità", ossia come il filo a piombo, mentre *orizzontale* indica "perpendicolare alla direzione verticale". Dunque, nel caso ci si restringa ad un piano che passa per la verticale, l'orizzontalità indica una direzione (che varia man mano che ci si sposta su un'altra verticale), mentre nel caso tridimensionale l'orizzontalità indica un piano (che varia man mano che ci si sposta su un'altra verticale). A volte l'orizzontalità viene riferita a una superficie: una superficie orizzontale è una superficie che, in ogni suo punto, è perpendicolare alla verticale passante per quel punto. Nel caso della Terra, una superficie orizzontale è pressoché sferica (ma, se ci occupiamo di una zona molto limitata, possiamo, anche in fisica, supporre che si tratti di un piano).

Anche in altre discipline i modelli geometrici vengono impiegati non solo per rappresentare figure, traiettorie, …, ma pure altre situazioni. Consideriamo ad esempio il concetto di ***vettore***.



Noi abbiamo introdotto i vettori per descrivere i cambiamenti di posizione e la somma di vettori per descrivere l'effetto complessivo di due *successivi* cambiamenti di posizione: se una formica si sposta di **a** lungo un foglio e se poi il foglio viene spostato di **b** sul tavolo, possiamo descrivere lo spostamento complessivo della formica con la somma **a+b** dei vettori corrispondenti ai due spostamenti. Si può dimostrare che lo spostamento complessivo è lo stesso se i due movimenti sono contemporanei.

Oltre agli spostamenti in fisica vengono rappresentati con vettori anche le *velocità,* le *forze* e varie altre grandezze. Si tratta di grandezze di cui si può dare una descrizione completa indicando, oltre alla loro misura (*intensità*), la loro direzione. Ad esempio un peso di 15 kg può essere rappresentato con un vettore lungo 15 (vettore che trasla un punto in una posizione distante 15). Più precisamente, si parla di un «vettore di modulo 15». Infatti, dato un vettore v = (h, k) si chiama ***modulo*** di v la distanza dalla posizione iniziale alla posizione dopo l'applicazione della traslazione T_v, cioè $\sqrt{(h^2+k^2)}$.

Si può, inoltre, dimostrare che la composizione di due di esse [la composizione di due velocità, la composizione di due forze, …] dà luogo alla grandezza [una velocità, una forza, …] rappresentata dal vettore che è la somma dei vettori che rappresentano le due grandezze composte, come si vede nella figura soprastante, a destra.

Grandezze di questo genere (caratterizzate da intensità e direzione e che si compongono secondo la "regola del parallelogramma", ossia dando luogo ad un vettore somma che si dispone lungo la diagonale del parallelogramma che ha per lati le frecce che rappresentano i vettori sommati), vengono dette ***grandezze vettoriali***. In fisica, quindi, oltre ai vettori-spostamento, si considerano i vettori-forza, i vettori-velocità, … . Il modello matematico "*vettore*" viene, dunque, impiegato per rappresentare molte più situazioni, e non solo geometriche, rispetto a quelle da cui siamo partiti nell'u.d. *Per strada.*

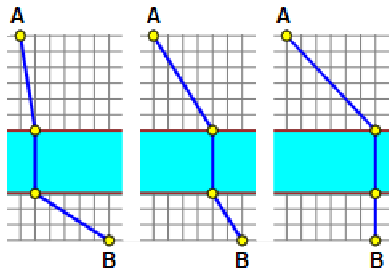
Le grandezze fisiche che sono completamente individuate da un solo valore numerico vengono invece dette ***scalari*** (basta una "scala" numerica, senza indicazioni di direzione). Sono tali ad esempio il *tempo*, la *temperatura* e la *massa.*

6. Esercizi

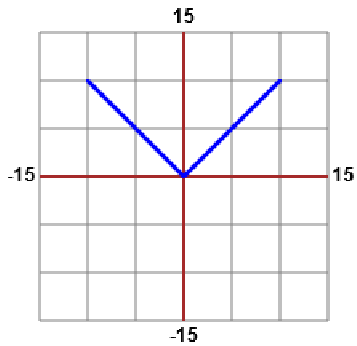
e1 A partire da un punto al centro di un foglio di carta quadrettata rappresenta i punti intermedi e il punto finale in cui si arriva applicando successivamente le traslazioni $\mathbf{T}_{7,2}$, $\mathbf{T}_{3,-4}$ e $\mathbf{T}_{-10,2}$.

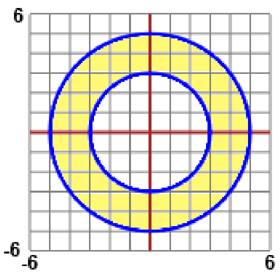
e2 Due località A e B sono separate da un fiume dal letto molto ampio. Viene deciso di congiungere A e B con una strada, comprendente un ponte, che, per motivi tecnici, deve essere costruito perpendicolarmente al corso del fiume. Sotto sono illustrati tre progetti per la costruzione di questa strada. Sapresti stabilire senza fare calcoli quale dei tre progetti rende A e B più vicine (nel senso della "distanza lungo la strada")?

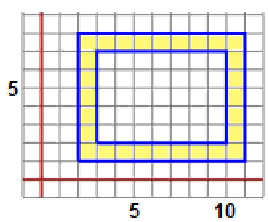
[Traccia. Su un foglio quadrettato riproduci la strada che si otterrebbe da ciascun progetto componendo diversamente i vettori che rappresentano i tre tratti rettilinei: prima il tratto del ponte, poi il tratto da A al letto del fiume, poi il tratto dal letto del fiume a B]



e3 A fianco è tacciato il grafico di x → |x| per x che varia nell'intervallo [−10,10]. Prova a tracciare, senza fare calcoli, i grafici di x → |x|−10 e di x → −|x|.
[*traccia*: i punti del primo sono ottenibili dai punti del grafico di x → |x| abbassandone l'ordinata di 10, cioè applicando la traslazione verticale di passo Δy=−10; i punti del secondo sono ottenibili dallo stesso grafico cambiando il segno dell'ordinata]

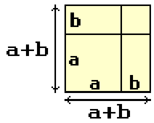




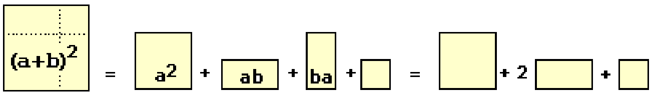


e4 Descrivi le figure tratteggiate nelle forma: { (x,y) : *condizione* }.

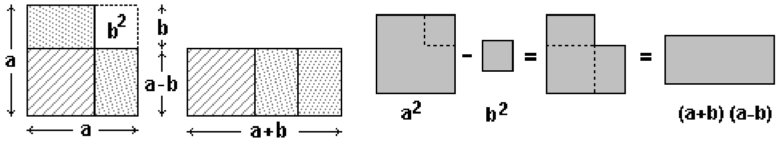
e5 Disegna su carta quadrettata la figura {(x,y) : NOT 9 < x^2+y^2 < 25}



e6 Per giustificare "fisicamente" l'equivalenza $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$ osserva la figura a fianco e completa quanto segue.

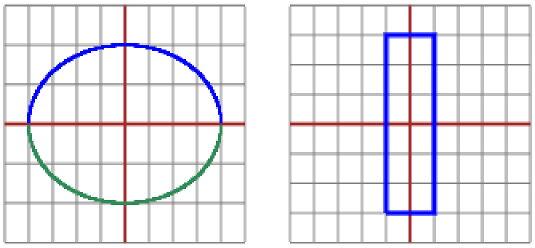


e7 Utilizzando un ragionamento "fisico" analogo a quello impiegato nel quesito **e7**, giustifica l'equivalenza di $a^2 - b^2$ a $(a+b)\cdot(a-b)$. Verifica questa equivalenza anche con metodi algebrici.



e8 Mediante la CT calcola $(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cdot(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Che cosa ottieni?
Trasforma il termine usando l'equivalenza discussa nel quesito precedente (con $a = \sqrt{3}$, …) e calcola il nuovo termine.

e9 Utilizza opportunamente l'equivalenza discussa in **e7** per calcolare mentalmente $97\cdot 103$.



e10 Le figure a lato sono un "cerchio" e un "quadrato", ma non sono rappresentate in un sistema monometrico. Assegna valori alle tacche in modo che, nel sistema di riferimento che ottieni, tali figure siano effettivamente un cerchio e un quadrato.

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

piano numerico (prima di fig.1) *spazio a ... dimensioni* (prima di es.2) *traslazione* (dopo es.3) *vettore* (dopo es.3) *distanza euclidea* (paragrafo 3) *distanza urbanistica* (paragrafo 3) *cerchio* (paragrafo 4) *modulo di un vettore* (paragrafo 5) *grandezza vettoriale* (paragrafo 5)

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 ordina Grafici divisori Indet divis distanza cerchio 1